ВВЕДЕНИЕ

Пособие, которое вы держите в руках, — краткий справочник теоретического материала для сдачи ЕГЭ, позволяющий в экспресс-режиме подготовиться к экзамену по математике профильного уровня в 11 классе. Книга включает 6 разделов — «Алгебра», «Уравнения и неравенства», «Функции», «Начала математического анализа», «Геометрия», «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей». Для удобства восприятия и запоминания материал в основном приведён в таблицах и схемах. Структура и содержание пособия позволяют ученику актуализировать, систематизировать и закрепить знания по математике за курс средней школы.

Авторы надеются, что данное пособие поможет любому ученику подготовиться к ЕГЭ по математике и успешно сдать его.

Раздел 1. **АЛГЕБРА**

1. Числа, корни и степени

В данном разделе рассматриваются действия с десятичными и обыкновенными дробями, рациональными, иррациональными и действительными числами. Представлены свойства степеней с натуральным, целым, рациональным и действительным показателем.

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Натуральные числа (1; 2; 3; 4; 5...), числа, им противоположные (–1; –2; –3; –4; –5...), и число нуль образуют множество **целых чисел.**

Множество натуральных (лат. *naturalis* — природа) чисел имеет специальное обозначение — N; множество целых (нем. *zahl* — число) чисел — Z.

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Степенью числа a с натуральным показателем n, бо́льшим 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}}$$

a — основание степени

n — показатель степени

Таблица квадратов

Десятки	Единицы									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Таблица степеней

a^n	Значения n					
	1	2	3	4	5	6
2^n	2	4	8	16	32	64
3^n	3	9	27	81	243	729
4^n	4	16	64	256	1024	4096
5^n	5	25	125	625	3125	15 625
6^n	6	36	216	1296	7776	46 656
7^n	7	49	343	2401	16 807	
8^n	8	64	512	4096	32 768	
9^n	9	81	729	6561	59 049	

a^n	Значения n			
	7	8	9	10
2^n	128	256	512	1024
3^n	2187	6561	19 683	59 049

Свойства степеней

$a^1 = a$ | $(a^x)^y = a^{xy}$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ | $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$, где $a \neq 0$ | $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, где $b \neq 0$

При чётной степени

$a,\ b > 0$

$(-a)^n = b$ $\quad$ $-a^n = -b$

$(-3)^4 = 81$ $\quad$ $-3^4 = -81$

Если в основании отрицательное число

$a^n > 0$, если n — чётное число (2; 4; 6...):

$$(-3)^4 = 81.$$

$a^n < 0$, если n — нечётное число (1; 3; 5...):

$$(-2)^5 = -32.$$

ДРОБИ

Число вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, называют **обыкновенной дробью.**

m ← числитель

n ← знаменатель

Любое число, знаменатель дробной части которого выражается единицей с одним или несколькими нулями, можно представить в виде **десятичной дроби.**

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной:

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}, \text{ где } c\neq 0.$$

Действия с обыкновенными дробями

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Выделение целой части из неправильной дроби:

$$\frac{17}{7}=2\frac{3}{7} \qquad \begin{array}{r|l} -17 & 7 \\ \underline{14} & 2 \\ 3 & \end{array}$$

Перевод обыкновенной дроби в десятичную:

$$\frac{17}{8}=2{,}125;$$

$$\frac{3}{25}=\frac{3\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{12}{100}=0{,}12;$$

$$\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 125}{8\cdot 125}=\frac{375}{1000}=0{,}375.$$

$$\begin{array}{r|l}
-17 & 8 \\
\underline{16} & 2{,}125 \\
-10 & \\
\underline{8} & \\
-20 & \\
\underline{16} & \\
-40 & \\
\underline{40} & \\
0 &
\end{array}$$

Перевод смешанного числа в неправильную дробь:

$$3\frac{5}{9}=\frac{3\cdot 9+5}{9}=\frac{32}{9}.$$

Чтобы **сложить (вычесть) смешанные числа**, надо:

1) привести дробные части этих чисел к наименьшему общему знаменателю;
2) отдельно выполнить сложение (вычитание) целых частей и отдельно — дробных.
   - Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.
   - Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть.

Чтобы выполнить **умножение смешанных чисел**, надо:
1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
2) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;
3) первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем.

Чтобы выполнить **деление смешанных чисел**, надо:
1) записать смешанные части в виде неправильных дробей;
2) делимое умножить на число, обратное делителю.

Действия с десятичными дробями

Чтобы **сложить (вычесть) десятичные дроби**, надо:
1) уравнять в этих дробях количество знаков после запятой;
2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой;
3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;
4) поставить в ответе запятую под запятой.

Чтобы **перемножить две десятичные дроби**, надо:
1) выполнить умножение, не обращая внимания на запятые;
2) отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

Чтобы **разделить десятичную дробь на натуральное число**, надо:
1) выполнить деление целой части на натуральное число;
2) поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части;
3) продолжить деление дробной части, добавляя (по необходимости) ноль к остатку.

Чтобы **разделить число на десятичную дробь**, надо:
1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;
2) после этого выполнить деление на натуральное число.

ПРОЦЕНТЫ

Процентом (лат. *per cent* — на сотню) называется одна сотая часть величины.

$1\,\% = \dfrac{1}{100}$	$100\,\% = 1$	$3\,\% = 0{,}03$ $(3 : 100)$	$0{,}2 = 20\,\%$ $(0{,}2 \cdot 100)$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Целые и дробные числа (положительные и отрицательные) образуют множество **рациональных чисел.**

Множество рациональных (лат. *ratio* — деление) чисел обозначается Q.

Любое рациональное число можно представить в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.

Любое рациональное число можно записать в виде десятичной дроби либо в виде периодической дроби.

Действия с отрицательными и положительными числами

Чтобы **сложить два отрицательных числа,** надо:
1) сложить их модули;
2) поставить перед полученным числом знак «–».

Чтобы **сложить два числа с разными знаками**, надо:

1) из большего модуля слагаемых вычесть меньший;
2) поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

Чтобы из данного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Чтобы **перемножить (разделить) два числа с разными** знаками, надо перемножить (разделить) модули этих чисел и поставить перед полученным числом знак «–».

Чтобы **перемножить (разделить) два отрицательных числа**, надо перемножить (разделить) их модули.

СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0 \qquad a^0 = 1,\ a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,\ a \neq 0,\ b \neq 0$$

КОРЕНЬ СТЕПЕНИ $n>1$ И ЕГО СВОЙСТВА

Корнем n-й степени $(n \in N,\ n>1)$ из действительного числа a называется такое действительное число b, n-я степень которого равна a.

$\sqrt[m]{a}$ не существует, если $a<0$ и m — чётное число.

Если n — чётное число, то $\sqrt[n]{x^n}=|x|$.

Свойства корней n-й степени

Для любых $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n \geq 2$, $m \geq 2$:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k} \qquad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},\ b \neq 0 \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$$

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА

Пусть $a>0$, $\frac{m}{n}$ — рациональное число $(n \geq 2,\ m \in Z,\ n \in N)$, тогда $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Все свойства степени с натуральным показателем верны для степени с любым рациональным показателем и положительным основанием.

$a > 1$, r — рациональное число

Если $r > 0$, то $a^r > 1$. **Если $r < 0$, то $0 < a^r < 1$.**

$a > 1$, r, t — рациональные числа

Если $r > t$, то $a^r > a^t$.

$0 < a < 1$, r, t — рациональные числа

Если $r > t$, то $a^r < a^t$.

СВОЙСТВА СТЕПЕНИ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

При любом $x \in R$ и любом $a > 0$ степень a^x является положительным действительным числом: $a^x > 0$ при $x \in R$, $a > 0$.

Все свойства степени с рациональным показателем верны для степени с действительным показателем.

$$\frac{2^{2\sqrt{3}}}{0,25^{2-\sqrt{3}}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\sqrt{3}}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{\left(2^{-2}\right)^{2-\sqrt{3}}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-2\left(2-\sqrt{3}\right)}} = \frac{2^{2\sqrt{3}}}{2^{-4+2\sqrt{3}}} =$$

$$= 2^{2\sqrt{3}-\left(-4+2\sqrt{3}\right)} = 2^{2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}} = 2^4 = 16.$$

2. Основы тригонометрии

Раздел посвящён тригонометрическим функциям, радианной и градусной мерам угла. Рассматриваются основные тригонометрические формулы и их применение при упрощении выражений.

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА

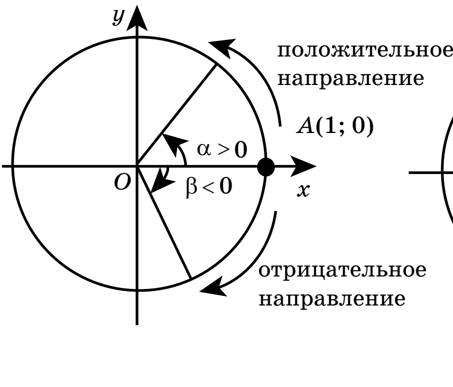
Единичной окружностью в тригонометрии называют окружность радиуса 1 с центром в начале системы координат xOy.

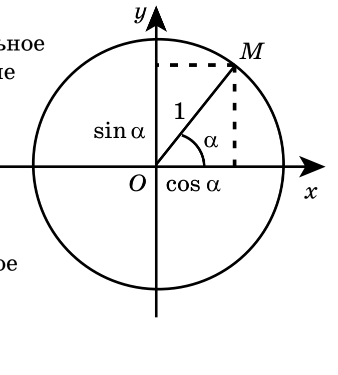
Синусом угла α ($\sin\alpha$) называется ордината точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.

Косинусом угла α ($\cos\alpha$) называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1; 0) вокруг начала координат на угол α.

Тангенсом угла α ($\mathrm{tg}\,\alpha$) называется отношение синуса угла к его косинусу.

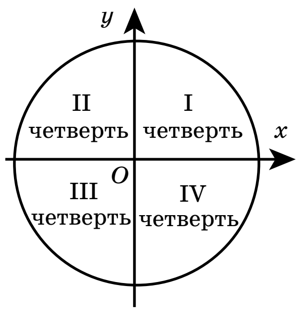
Котангенсом угла α ($\mathrm{ctg}\,\alpha$) называется отношение косинуса угла к его синусу.



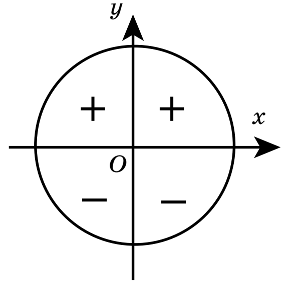


$$\sin\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

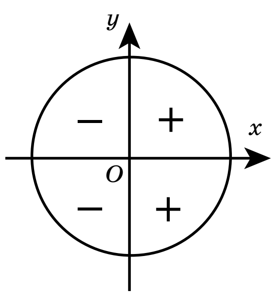
Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса



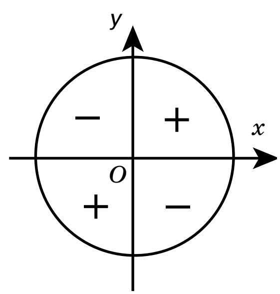
$\sin\alpha$



$\cos\alpha$



$\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$



РАДИАННАЯ МЕРА УГЛА

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется **углом в один радиан.**