УДК 373.167.1:512
ББК 22.1я72
М91

Муравин, Г. К.

М91 Алгебра. 9 кл. : учебник / Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. — 5-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2018. — 319, [1] с. — (Российский учебник).

ISBN 978-5-358-19651-3

Учебник является частью УМК по математике для 1—11 классов. Теоретический материал разделен на обязательный и дополнительный, система заданий дифференцирована по уровню сложности, каждый пункт главы завершается контрольными вопросами и заданиями, а каждая глава — домашней контрольной работой. В учебник включены темы проектов и сделаны ссылки на интернет-ресурсы.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования, имеет гриф «Рекомендовано» и включен в Федеральный перечень.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.1я72

РОССИЙСКИЙ УЧЕБНИК

Учебное издание

Муравин Георгий Константинович
Муравин Константин Соломонович
Муравина Ольга Викторовна

АЛГЕБРА. 9 класс

Учебник

Зав. редакцией *М. Г. Циновская*. Редактор *Т. С. Зельдман*
Художественный редактор *А. В. Пряхин*. Технический редактор *И. В. Грибкова*
Компьютерная верстка *С. Л. Мамедова*. Корректор *Г. И. Мосякина*

Подписано к печати 01.03.18. Формат 60 × 90 $^{1}/_{16}$.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 20,0. Тираж 5000 экз. Заказ № .

ООО «ДРОФА». 123308, Москва, ул. Зорге, дом 1, офис № 313.

росучебник.рф/метод

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги можно отправлять по электронному адресу: expert@rosuchebnik.ru
По вопросам приобретения продукции издательства обращайтесь: тел.: 8-800-700-64-83; e-mail: sales@rosuchebnik.ru
Электронные формы учебников, другие электронные материалы и сервисы: LECTA.ru, тел.: 8-800-555-46-68
В помощь учителю и ученику: регулярно пополняемая библиотека дополнительных материалов к урокам, конкурсы и акции с поощрением победителей, рабочие программы, вебинары и видеозаписи открытых уроков росучебник.рф/метод

ISBN 978-5-358-19651-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 3. Корни n-й степени

Глава 4. Прогрессии

Глава 5. Элементы теории вероятностей и статистики

Глава 6. Повторение

Уважаемые девятиклассники!

В этом году вы завершаете изучение школьного курса алгебры.

Авторы постарались помочь вам как в изучении нового материала, так и в повторении изученного ранее. Знать математику — это значит уметь решать задачи. Задач в учебнике много, и они разной степени трудности. В решении задач, номера которых не имеют обозначений, вы не должны испытать затруднений. Значком «○» отмечены задания, в которых путь к ответу, как правило, связан с небольшими техническими сложностями. Задания, над которыми следует подумать, имеют обозначение «●», и, наконец, символом «*» обозначены наиболее трудные задачи.

Если у вас есть компьютер или микрокалькулятор, то вы сможете выполнить специальные вычислительные задания, отмеченные значком «■».

Ссылки с помощью значка указывают на материалы, представленные в электронной форме учебника.

Кроме основного материала, изучение которого обязательно, в учебнике помещён и дополнительный материал, знакомство с которым желательно. Начало дополнительного материала обозначается значком «▼», а конец — «△».

В разделах «Ответы», «Советы и решения» вы найдёте ответы к большинству заданий, а к некоторым из них — советы и даже решения. Решив задачу, сравните свой ответ с ответом в учебнике. Прочитайте совет по решению задачи или посмотрите её решение.

Каждый пункт учебника завершается контрольными вопросами и заданиями, а к каждой главе предлагается домашняя контрольная работа.

Если вы *можете* ответить на все контрольные вопросы, *справляетесь* со всеми контрольными заданиями и *выполнили* домашнюю контрольную работу, значит, материал вами усвоен.

Желаем вам успехов!

Глава 1

НЕРАВЕНСТВА

1. Общие свойства неравенств

Решение многих задач приводит к необходимости сравнения значений выражений. Так, например, выясняя, существует ли треугольник со сторонами 5, 7 и 11 см, мы выбираем больший отрезок и сравниваем его длину с суммой длин двух других. По знакомому вам из геометрии *неравенству треугольника* бо́льшая сторона должна быть меньше суммы двух других сторон. Именно такое соотношение мы и получаем в рассматриваемом примере $11 < 5 + 7$, значит, треугольник со сторонами 5, 7 и 11 см существует.

При решении задачи мы сначала выбрали большее из чисел 5, 7 и 11, а затем сравнили его с суммой $5 + 7$, равной 12.

Вообще, при сравнении двух различных чисел a и b может быть одно из двух: или $\boldsymbol{a < b}$, это значит, что число a меньше числа b, или $\boldsymbol{a > b}$ — число a больше числа b.

На координатной прямой большее из чисел изображается правее (рис. 1), а меньшее — левее. Используя стандартную для математиков конструкцию «Если ..., то ...», можно записать следующее.

Если $\boldsymbol{a > b}$, то $\boldsymbol{b < a}$.

Графическая иллюстрация (рис. 2) делает очевидным и следующее *свойство* неравенств.

Если $\boldsymbol{a < b}$ и $\boldsymbol{b < c}$, то $\boldsymbol{a < c}$.

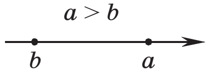

Рис. 1

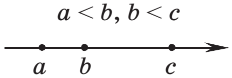

Рис. 2

Следующая **группа свойств** часто используется при выполнении арифметических действий с неравенствами.

Свойство	Символическая запись	Рабочая формулировка
1	Если $a > b$, то $a + c > b + c$ и $a - c > b - c$	К обеим частям неравенства можно прибавить (или вычесть) одно и то же число
2	Если $a + b > c + d$, то $a + b - c > d$	Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком
3	Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$	Неравенства одного знака можно почленно складывать
4	Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$	Обе части неравенства можно умножить на одно и то же положительное число
5	Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$	Обе части неравенства можно умножить на одно и то же отрицательное число, изменив знак неравенства на противоположный
6	Если $a > b$, то $-a < -b$	Можно изменить знаки обеих частей неравенства, одновременно изменив знак неравенства на противоположный

На координатной прямой число $a + c$ отстоит от числа a на c единиц вправо, если $c > 0$, и влево, если $c < 0$. Это соображение позволяет проиллюстрировать свойство 1 (рис. 3).

Свойство 2 можно получить, если из обеих частей неравенства $a + b > c + d$ по свойству 1 вычесть число c.

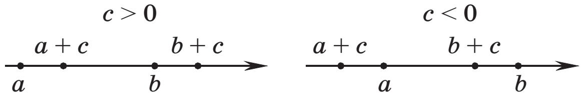

Рис. 3

Для доказательства свойства 3 воспользуемся тем, что $a > b$ тогда и только тогда, когда $a - b > 0$. Пусть $a > b$ и $c > d$. Это значит, что $a - b > 0$ и $c - d > 0$.

Рассмотрим разность $(a + c) - (b + d)$:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Получившееся выражение является суммой двух положительных чисел, значит, его значение положительно, т. е. $(a + c) - (b + d) > 0$. Отсюда $a + c > b + d$, что и требовалось доказать.

Докажем свойство 5. Как и в предыдущем доказательстве, рассмотрим разность $ac - bc$:

$$ac - bc = (a - b)c.$$

Поскольку $a > b$, разность $a - b$ положительна. Число c по условию отрицательно, значит, произведение $(a - b)c < 0$ и $ac - bc < 0$. Отсюда $ac < bc$, что и требовалось доказать.

Взяв в свойстве 5 число c равным -1, получим свойство 6.

Пример 1. Известно, что $a > b$. Какой знак неравенства следует поставить между выражениями $2 - 7a$ и $2 - 7b$?

Решение. Умножим обе части неравенства $a > b$ на -7. По свойству 5 знак неравенства при этом следует изменить. Получим $-7a < -7b$. Осталось применить свойство 1, прибавив число 2 к каждой части неравенства:

$$-7a + 2 < -7b + 2.$$

Ответ: $2 - 7a < 2 - 7b$.

Пример 2. Сравнить значения выражений

$(a + 1)(a - 1)$ и $(a + 2)(a - 2)$, где a — любое число.

Решение. Найдём разность значений данных выражений и в зависимости от её знака сделаем требуемый вывод.

$$(a + 1)(a - 1) - (a + 2)(a - 2) =$$
$$= (a^2 - 1) - (a^2 - 4) = a^2 - 1 - a^2 + 4 = 3.$$

Разность оказалась положительной, значит, уменьшаемое больше вычитаемого.

Ответ: $(a + 1)(a - 1) > (a + 2)(a - 2)$.

Наряду со знаками «<» и «>» в математике используют знаки «$\leqslant$» — «меньше или равно» и «$\geqslant$» — «больше или равно». В отличие от знаков *строгих неравенств* «<» и «>», предполагающих, что сравниваемые числа различны, знаки *нестрогих неравенств* «$\leqslant$» и «$\geqslant$» допускают случай равенства левой и правой частей неравенства. Так, например, верны неравенства: $2 \geqslant 2$, $2 \leqslant 2$, $3 \geqslant 2$ и $1 \leqslant 2$.

Пример 3. Доказать, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше, чем их среднее геометрическое.

Доказательство 1. Напомним, что средним арифметическим двух положительных чисел x и y называется их полусумма $\frac{x+y}{2}$, а средним геометрическим — корень из их произведения $\sqrt{xy}$. Таким образом, мы должны доказать неравенство $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$.

Рассмотрим разность левой и правой частей этого неравенства:

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2}.$$

Мы получили дробь, значение которой при $x = y$ равно нулю, а при любых неравных положительных значениях x и y больше нуля. Значит, $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 0$ или $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} > 0$. Но это и значит, что $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$ при любых положительных значениях x и y.

Доказательство 2. Пусть x и y — любые положительные числа. Построим окружность с диаметром $x + y$. Точка M перпендикуляра MH, восставленного к диаметру AB окружности (рис. 4), не может быть удалена от этого диаметра более чем на радиус окружности, равный $\frac{x+y}{2}$. Отрезок MH — высота прямоугольного тре-

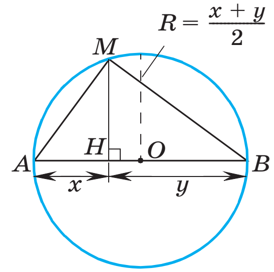

Рис. 4

угольника AMB. $MH = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{xy}$. Следовательно, $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, что и требовалось доказать. △

▼ Пример 4. Доказать, что сумма положительных значений обратно пропорциональных переменных x и y минимальна при $x = y$.

Доказательство. Найдём, какое значение принимает сумма $x + y$ при $x = y$. Произведение обратно пропорциональных переменных постоянно. Пусть $xy = k$. Тогда при $x = y$ имеем:

$$xy = x \cdot x = k,\ x^2 = k,\ x = \sqrt{k},\ x + y = x + x = 2x = 2\sqrt{k}.$$

Таким образом, мы должны доказать, что $x + y \geqslant 2\sqrt{k}$ при любых положительных значениях x и y. Рассмотрим разность левой и правой частей этого неравенства и вернёмся от k к равному ему произведению xy:

$$x + y - 2\sqrt{k} = x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2.$$

Мы получили выражение, значение которого при любых неравных положительных значениях x и y больше нуля. Значит, $x + y > 2\sqrt{k}$ при $x \neq y$. Поскольку $x + y = 2\sqrt{k}$ при $x = y$, число $2\sqrt{k}$ является минимальным, т. е. наименьшим значением суммы $x + y$, и это значение достигается при $x = y$, что и требовалось доказать. △

Пример 5. Доказать, что периметр выпуклого четырёхугольника больше суммы его диагоналей.

Доказательство. По неравенству треугольника имеем (рис. 5):

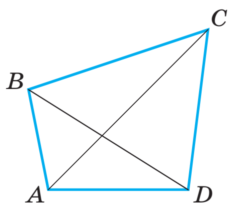

Рис. 5

$$AB + BC > AC,$$
$$BC + CD > BD,$$
$$CD + DA > AC,$$
$$DA + AB > BD.$$

Складывая неравенства одного знака, по свойству 3 получим:

$$2AB + 2BC + 2CD + 2DA > 2AC + 2BD.$$

Разделив обе части неравенства на положительное число 2 $\left(\text{это то же самое, что умножить на } \frac{1}{2}\right)$, по свойству 4 получим $AB + BC + CD + DA > AC + BD$. Это и требовалось доказать, так как в левой части неравенства стоит сумма сторон четырёхугольника, т. е. его периметр, а в правой части — сумма диагоналей четырёхугольника.

Упражнения

1. 1) Прочитайте неравенства:

а) $3{,}5 < 3{,}99$; в) $-10{,}05 \geqslant -10$; д) $-\frac{5}{8} \leqslant -\frac{7}{16}$;

б) $40\,702 > 4072$; г) $\frac{3}{5} \geqslant \frac{15}{25}$; е) $\sqrt{61} > \sqrt{59}$.

2) Назовите строгие и нестрогие неравенства.
3) Какие из этих неравенств верны?

2. Замените многоточие знаком равенства или неравенства так, чтобы получилось верное утверждение, если:
1) $a > b$, то $b \ldots a$;
2) $a = b$, то $b \ldots a$;
3) $a \leqslant b$, то $b \ldots a$;
4) $a > b$ и $b > c$, то $a \ldots c$;
5) $a = b$ и $b = c$, то $a \ldots c$;
6) $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \ldots c$.

3. Поставьте вместо многоточия знак «>» или «<», чтобы получилось верное неравенство:
1) $-23{,}5 \ldots -20{,}8$;
2) $-0{,}658 \ldots -0{,}65$;
3) $0{,}7647 \ldots \frac{13}{17}$;
4) $-\frac{11}{19} \ldots -0{,}5788$;
5) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots \frac{7}{9}$;
6) $\frac{1}{2} - \frac{3}{8} \ldots -\frac{1}{5}$;
7) $1 - \frac{7}{8} \ldots \frac{8}{7} - 1$;
8) $\frac{4}{5} - \frac{5}{6} \ldots \frac{3}{4} - \frac{4}{5}$.

4. Запишите в виде неравенства следующее утверждение.
1) Сумма чисел a и b меньше половины их произведения.
2) Разность чисел c и d больше половины их частного.
3) Квадрат разности чисел p и q меньше разности их квадратов.
4) Квадрат суммы чисел m и n больше суммы их кубов.

5) Куб разности чисел k и l меньше удвоенного квадрата их суммы.
6) Разность кубов чисел c и d больше полусуммы квадратов этих чисел.

7) Произведение трёх последовательных натуральных чисел, большее из которых n, меньше суммы их квадратов.

8) Произведение четырёх последовательных натуральных чисел, меньшее из которых k, больше, чем их утроенная сумма.

5. 1) Как расположены друг относительно друга на координатной прямой точки $A(a)$ и $B(b)$, если:
а) $a - b = 3$; б) $a - b = -1{,}5$; в) $a - b = 0$?
2) Отметьте точки на координатной прямой.

6. 1) Можно ли утверждать, что:
а) если $a > b$, то $a + 2 > b + 2$;
б) если $a < b$, то $a - 1 > b - 1$;
в) если $a > 7 + d$, то $a - 7 > d$?
2) Поставьте вместо многоточия знак неравенства и сделайте вывод:
а) если $a < b$, то $a + c \ldots b + c$;
б) если $a < b$, то $a - c \ldots b - c$;
в) если $a + b > c + d$, то $a + b - c \ldots d$.

7. Сложите неравенства:
1) $11{,}2 > 7{,}8$ и $-6{,}4 > -9{,}5$;
2) $-5{,}72 > -8{,}4$ и $-2{,}1 > -3{,}6$;
3) $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$ и $\frac{9}{10} < \frac{11}{12}$;
4) $-\frac{8}{9} < \frac{2}{3}$ и $\frac{10}{13} < \frac{13}{15}$.

8. Верно ли утверждение:
1) если сложить верное и неверное неравенства одного знака, то получится неверное неравенство того же знака;
2) если сложить два неверных неравенства одного знака, то получится неверное неравенство того же знака?

9. Сравните $a + b$ и $x + y$, если известно, что:
1) $a > x$, $b > y$;
2) $a \geqslant x$, $b \geqslant y$;
3) $a \leqslant x$, $b = y$;
4) $a \leqslant x$, $b < y$.

10. Можно ли утверждать, что:

1) если $a < b$, то $-a > -b$;
2) если $a > b$, то $0{,}3a > 0{,}3b$;
3) если $a < -3{,}2$, то $2a < -6{,}4$;
4) если $a > -2{,}8$, то $0{,}5a > -1{,}4$;
5) если $a > b$, то $-0{,}8a < -0{,}8b$;
6) если $a > b$, то $ab > b^2$;
7) если $3c > -2$, то $c > -0{,}7$;
8) если $-5a > -10$, то $a < 3$;
9) если $b < -\frac{4}{7}$, то $-7b > 4$;
10) если $b < -\frac{2}{3}$, то $3b < -2$?

11. Известно, что $a > b$. Можно ли утверждать, что:

1) $5a > 5b$;
2) $a > -b$;
3) $a + 1 > b + 1$;
4) $a - 3 > b - 3$;
5) $2a > b$;
6) $2a + 1 > 2b$;
7) $\frac{a}{b} > 1$;
8) $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$;
9) $\frac{b}{a} < 1$?

12. Известно, что $\sqrt{2} < 1{,}5$ и $\sqrt{3} < 1{,}8$. Какое неравенство можно записать для:

1) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$;
2) $2\sqrt{2}$;
3) $-\sqrt{3}$;
4) $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$;
5) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$;
6) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$?

13. 1) К обеим частям неравенства $-10 < -3$ прибавили число a. Можно ли утверждать, что получившееся неравенство верно?

2) Обе части неравенства $5 > 3$ умножили на число a^2. Можно ли утверждать, что неравенство $5a^2 > 3a^2$ верно? Можно ли утверждать, что неравенство $5a^2 > 3a^2$ неверно?

14. Докажите, что при всех значениях переменной верно неравенство:

1) $c^2 + 5 > 0$;
2) $(c - 3)^2 \geqslant 0$;
3) $-b^2 - 1 < 0$;
4) $-4d^2 + 12d - 9 \leqslant 0$;
5) $(a + 5)(a - 2) < (a + 2)(a + 1)$;
6) $(b - 6)(b - 4) > (b + 3)(b - 13)$.

15. Докажите, что:
1) квадрат среднего из любых трёх последовательных целых чисел больше произведения крайних;
2) произведение крайних из четырёх последовательных целых чисел меньше произведения двух других чисел.

16. Докажите, что:
1) если a — любое число, кроме $a = 5$, то $a^2 + 25 > 10a$;
2) если b — любое число, кроме $b = 6$, то $12b - b^2 < 36$.

17. Докажите, что при любом положительном значении a верно неравенство:

1) $\dfrac{5 + a}{12 + a} > \dfrac{5}{12}$; 2) $\dfrac{15 + a}{11 + a} < \dfrac{15}{11}$.

18. Докажите неравенство:

1) $\sqrt{ab} \geqslant \dfrac{2ab}{a + b}$; 2) $\dfrac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geqslant 2$.

19. Используя результаты, полученные в примере 4, найдите наименьшее из положительных значений выражения:

1) $x + \dfrac{1}{x}$; 2) $y + \dfrac{1}{100y}$; 3) $9x + \dfrac{25}{x}$; 4) $8y + \dfrac{18}{y}$.

20. 1) Докажите, что сумма двух неравных взаимно обратных положительных чисел больше 2.
2) Докажите, что сумма двух положительных взаимно обратных чисел не меньше чем 2.

21. 1) Для спортивных игр отводят прямоугольный участок земли площадью 600 м^2. Его нужно огородить металлической сеткой и разделить такой же сеткой на две одинаковые прямоугольные площадки. При каких размерах участка понадобится наименьшее количество металлической сетки?
2) Для игры в волейбол предполагается выделить прямоугольный участок земли площадью 720 м^2, огородить его металлической сеткой высотой 3 м и разделить на две прямоугольные площадки сеткой высотой 1,5 м. При каких размерах участка стоимость изгороди окажется наименьшей, если стоимость 1 м^2 трёхметровой сетки такая же, как 1 м^2 полутораметровой?

22. Докажите, что если переменные x и y принимают положительные значения, такие что $x + y = k$, где k — некоторое фиксированное число, то значение произведения xy максимально при $x = y$.

23. Докажите, что из всех прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

24. Найдите наибольшую площадь прямоугольного участка земли, который можно отгородить металлической сеткой длиной 100 м на берегу реки. (Сторону участка, примыкающую к реке, огораживать не требуется.)

25. 1) Школьник прошёл первую половину пути до станции со скоростью 4 км/ч, а вторую половину — со скоростью 6 км/ч. Обратно он возвращался со скоростью 5 км/ч. Когда школьник затратил больше времени: по пути на станцию или на обратном пути?

2) Лодочник проплыл n км по течению реки со скоростью 7 км/ч и вернулся обратно, двигаясь против течения со скоростью 4 км/ч. На следующий день он проплыл по озеру расстояние, равное $2n$ км, причём двигался со скоростью 6 км/ч. На какой из двух маршрутов потребовалось больше времени?

26. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, расположенной внутри выпуклого многоугольника, до его вершин больше половины периметра этого многоугольника. Рассмотрите: 1) треугольник; 2) четырёхугольник.

27.* Докажите, что периметр треугольника ABC (рис. 6) больше периметра треугольника ANC, если точка N расположена внутри треугольника ABC.

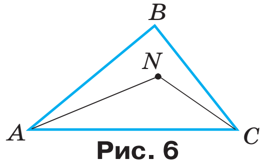

Рис. 6

28.* Найдите такие натуральные числа a и b, чтобы одновременно выполнялись три неравенства:

1) $3a - b < 2$; 2) $b - a < 6$; 3) $a + b > 10$.

29.* Известно, что процент блондинов среди голубоглазых россиян больше, чем их процент среди всех россиян. Докажите, что процент голубоглазых людей среди всех россиян меньше, чем процент голубоглазых среди россиян-блондинов.

! Контрольные вопросы и задания

1. Как будут выглядеть рассмотренные в этом пункте свойства неравенств для случая нестрогих неравенств? Останутся ли они верными?

2. Сравните значения выражений $7 - 3a$ и $7 - 3b$, если число a меньше числа b.

3. Докажите, что значение выражения $(a + 7)^2$ больше значения выражения $(a + 10) \cdot (a + 4)$, каким бы ни было число a.

2. Свойства неравенств, обе части которых неотрицательны

На практике наиболее часто встречаются неравенства с положительными или, по крайней мере, с неотрицательными частями. Эти неравенства обладают всеми свойствами, которые были рассмотрены в предыдущем пункте. Вместе с тем у таких неравенств имеются и свои, дополнительные свойства, представленные в таблице.

Свойство	Символическая запись	Рабочая формулировка
1	Если $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$	Неравенства с неотрицательными частями можно перемножать
2	Если $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	Обе положительные части неравенства можно «перевернуть», изменив знак неравенства на противоположный
3	Если $a > b$, то $a^2 > b^2$	Неравенства с неотрицательными частями можно возводить в квадрат
4	Если $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$	Из обеих неотрицательных частей неравенства можно извлечь квадратный корень

Такими же свойствами обладают и нестрогие неравенства.

Для доказательства любого из перечисленных свойств можно рассмотреть разность левой и правой частей доказываемого неравенства.