

УДК 373.167.1:512  
ББК 22.1я72  
М91

**Муравин, Г. К.**  
М91 Алгебра. 8 кл. : учебник / Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. — 4-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2017. — 255, [1] с.

ISBN 978-5-358-18558-6

Учебник является частью УМК по математике для 1—11 классов. Теоретический материал разделен на обязательный и дополнительный, система заданий дифференцирована по уровню сложности, каждый пункт главы завершается контрольными вопросами и заданиями, а каждая глава — домашней контрольной работой. В учебник включены темы проектов и сделаны ссылки на интернет-ресурсы.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования, имеет гриф «Рекомендовано» и включен в Федеральный перечень.

УДК 373.167.1:512  
ББК 22.1я72

*Учебное издание*

**Муравин** Георгий Константинович  
**Муравин** Константин Соломонович  
**Муравина** Ольга Викторовна

**АЛГЕБРА. 8 класс**

**Учебник**

Зав. редакцией *М. Г. Циновская*. Редактор *Т. С. Зельдман*  
Художественный редактор *А. В. Прякин*. Технический редактор *И. В. Грибкова*  
Компьютерная верстка *С. Л. Мамедова*. Корректор *Г. И. Мосякина*

В соответствии с Федеральным законом от 29.12.2010 г. № 436-ФЗ  
знак информационной продукции на данное издание не ставится

Сертификат соответствия  
№ РОСС RU.ПЩ01.Н04166.



Подписано к печати 16.05.17. Формат 60 × 90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 16,0. Тираж 2000 экз. Заказ № .

ООО «ДРОФА». 123308, Москва, ул. Зорге, дом 1, офис № 313.  
Сайт: [drofa-ventana.ru](http://drofa-ventana.ru)

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги  
можно отправлять по электронному адресу: [expert@drofa-ventana.ru](mailto:expert@drofa-ventana.ru)

По вопросам приобретения продукции издательства обращайтесь:  
тел.: 8-800-700-64-83; e-mail: [sales@drofa.ru](mailto:sales@drofa.ru); сайт: [drofa-ventana.ru/buy/](http://drofa-ventana.ru/buy/)

ISBN 978-5-358-18558-6

© ООО «ДРОФА», 2014

# ОГЛАВЛЕНИЕ

От авторов . . . . .	5
----------------------	---

## Глава 1. Рациональные выражения

1. Формулы куба двучлена . . . . .	7
2. Формулы суммы и разности кубов . . . . .	14
3. Допустимые значения. Сокращение дробей . . . . .	19
4. Умножение, деление и возведение дробей в степень . . . . .	25
5. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями . . . . .	31
6. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями . . . . .	35
7. Упрощение рациональных выражений . . . . .	44
8. Дробные уравнения с одной переменной . . . . .	48

## Глава 2. Степень с целым показателем

9. Прямая и обратная пропорциональность величин . . . . .	53
10. Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график . . . . .	61
11. Определение степени с целым отрицательным показателем . . . . .	67
12. Свойства степеней с целыми показателями . . . . .	70
13. Стандартный вид числа . . . . .	74

## Глава 3. Квадратные корни

14. Рациональные и иррациональные числа . . . . .	79
15. Периодические и непериодические бесконечные десятичные дроби . . . . .	83
16. Функция $y = x^2$ и её график . . . . .	89
17. Понятие квадратного корня . . . . .	93

---

18. Свойства арифметических квадратных корней . . . . .	99
19. Внесение и вынесение множителя из-под знака корня . . . . .	105
20. Действия с квадратными корнями . . . . .	108

#### **Глава 4. Квадратные уравнения**

21. Выделение полного квадрата . . . . .	116
22. Решение квадратного уравнения в общем виде . . . . .	121
23. Теорема Виета . . . . .	126
24. Частные случаи квадратных уравнений . . . . .	133
25. Задачи, приводящие к квадратным уравнениям . . . . .	138
26. Решение систем уравнений способом подстановки . . . . .	149
27. Решение задач с помощью систем уравнений . . . . .	155

#### **Глава 5. Вероятность**

28. Вычисление вероятностей . . . . .	160
29. Вероятности вокруг нас . . . . .	166

#### **Глава 6. Повторение**

30. Числа и числовые выражения . . . . .	174
31. Рациональные выражения . . . . .	176
32. Квадратные корни . . . . .	180
33. Квадратные уравнения . . . . .	187

<b>Практикум по решению задач . . . . .</b>	<b>195</b>
<b>Исследовательские работы . . . . .</b>	<b>203</b>
<b>Проверь себя! Домашние контрольные работы . . . . .</b>	<b>207</b>
<b>Ответы . . . . .</b>	<b>211</b>
<b>Советы и решения . . . . .</b>	<b>224</b>
<b>Список литературы и интернет-ресурсов . . . . .</b>	<b>250</b>
<b>Темы проектов . . . . .</b>	<b>251</b>
<b>Справочные материалы . . . . .</b>	<b>252</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>255</b>

## *Уважаемые восьмиклассники!*

В этом году вы продолжаете изучать школьный курс алгебры.



Как и в прошлом году, авторы учебника постарались помочь вам как в изучении нового материала, так и в повторении изученного ранее.

*Знать математику — это значит уметь решать задачи.*

Задач в учебнике много, и они разной степени трудности.

В решении задач, номера которых не имеют обозначений, вы не должны испытать затруднений. Значком «○» отмечены задания, в которых путь к ответу, как правило, связан с небольшими техническими сложностями. Задания, над которыми следует подумать, имеют обозначение «●», и наконец, символом «\*» обозначены наиболее трудные задачи.

Если у вас есть компьютер или микрокалькулятор, то вы сможете выполнить специальные вычислительные задания, отмеченные значком «■».

В выполнении заданий учебника вам помогут рабочие тетради. Соответствующие заданию учебника номера из рабочей тетради указаны после значка . Ссылки с помощью значка  указывают на материалы, представленные в электронном приложении, которое размещено на сайте [www.drofa.ru](http://www.drofa.ru).

Кроме основного материала, изучение которого обязательно, в учебнике помещён и дополнительный материал, знакомство с которым желательно. Начало дополнительного материала обозначается значком «▼», а конец — «△».

В разделах «Ответы», «Советы и решения» вы найдёте ответы к большинству заданий, а к некоторым из них — советы и даже решения. Решив задачу, сравните свой ответ с ответом в учебнике. Прочитайте совет по решению задачи или посмотрите её решение.

Каждый пункт учебника завершается контрольными вопросами и заданиями, а к каждой главе предлагается домашняя контрольная работа.


Если вы *можете* ответить на все контрольные вопросы, *справляетесь* со всеми контрольными заданиями и *выполнили* домашнюю контрольную работу, значит, материал вами усвоен.


*Желаем вам успехов!*

Авторы

# РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

## 1. Формулы куба двучлена

В курсе алгебры 7 класса много внимания уделялось преобразованию произведения многочленов в многочлен стандартного вида. При таком преобразовании каждый из членов первого многочлена умножается на каждый из членов второго (обычно, чтобы не потерять слагаемые, сначала первый член первого многочлена умножают на все члены второго многочлена, затем второй член первого многочлена умножают на все члены второго многочлена и т. д.), после чего приводят подобные слагаемые. 

 **Пример 1.** Привести к многочлену стандартного вида  $(a^2 + 2ab - b^2 + b^3)(ab - 3)$ .

Решение.

$$\begin{aligned} & (a^2 + 2ab - b^2 + b^3)(ab - 3) = \\ & = a^3b - 3a^2 + 2a^2b^2 - 6ab - ab^3 + 3b^2 + ab^4 - 3b^3. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок у нас сразу получился многочлен стандартного вида, так как в нём не оказалось подобных членов. Каждый член этого многочлена является произведением одного из членов первого множителя на один из членов второго множителя. Число слагаемых при этом можно найти по *правилу произведения*, известному вам из 7 класса. Первый множитель содержит 4 члена, значит, выбрать один из них можно четырьмя способами. Для каждого из них есть по 2 варианта выбора второго множителя. Таким образом, после раскрытия скобок получается  $4 \cdot 2 = 8$  слагаемых.

К умножению многочлена на многочлен можно свести и возведение многочлена в степень. Возведение двучлена в квадрат в 7 классе дало нам две формулы сокращённого умножения: *квадрат суммы*  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$  и *квадрат разности*  $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ . Чтобы получить формулу ку-

ба двучлена, его можно представить как произведение двучлена на его квадрат:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

К формуле куба разности приходим, заменив в формуле куба суммы  $b$  на  $-b$ :

$$(a + (-b))^3 = a + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Мы получили ещё две формулы сокращённого умножения.

Куб суммы	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Куб разности	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Таким же путём, рассматривая четвертую степень двучлена как произведение двучлена и его куба:

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)^3,$$

можно преобразовать её в многочлен стандартного вида.

▼ Существует другой подход к решению этой задачи.

**✓ Пример 2.** Привести к многочлену стандартного вида выражение  $(a + b)^4$ .

**Решение.** Представим четвертую степень двучлена как произведение двучленов:

$$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b).$$

После раскрытия скобок (до приведения подобных слагаемых) должен получиться многочлен, каждый из членов которого является произведением четырёх множителей, выбираемых по одному из каждой скобки. При этом может получиться 5 различных одночленов:  $a^4$ ,  $a^3b$ ,  $a^2b^2$ ,  $ab^3$  и  $b^4$ . Если во всех скобках выбрать первый член, то получится  $a^4$ , если же первый член выбрать только в третьей скобке, а в остальных трёх скобках — второй, то получится  $ab^3$ . Такие же одночлены получатся, если выбрать  $a$  только в первой, только во второй или только в четвертой скобке. Значит, после раскрытия скобок образуется четыре одинаковых одночлена  $ab^3$ . После

приведения подобных слагаемых они образуют член  $4ab^3$ . Коэффициент этого члена равен числу способов выбора одной скобки (в которой выбирается  $a$ ) из четырёх.

Аналогично коэффициент одночлена с буквенной частью  $a^2b^2$  окажется равным числу способов выбора двух скобок из четырёх<sup>1</sup>.

Порядок выбора скобок роли не играет, важно лишь, из скольких скобок в одночлен идёт множитель  $a$ . Таким образом, речь идёт о сочетаниях. Как мы уже говорили, одночлен  $a^4$  получается при выборе всех четырёх скобок из четырёх, одночлен  $ab^3$  — при выборе одной скобки из четырёх и т. д. Член  $b^4$  получится, если ни в одной из скобок не брать  $a$ . После приведения подобных слагаемых каждый коэффициент многочлена стандартного вида окажется равным числу соответствующих сочетаний из четырёх элементов:

$$(a + b)^4 = C_4^4 a^4 + C_4^3 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^1 a b^3 + C_4^0 b^4.$$

Формула числа сочетаний из  $n$  элементов по  $m$  была выведена в 7 классе.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

По этой формуле:  $C_4^4 = \frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1$ ;  $C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3!}{3! \cdot 1} = 4$ ;

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 6.$$

Заметим, что  $C_n^m = C_n^{n-m}$ , так как при замене  $m$  на  $n - m$  в формуле числа сочетаний меняется только порядок сомножителей в знаменателе дроби  $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ .

Значит,  $C_4^1 = C_4^{4-1} = C_4^3 = 4$  и  $C_4^0 = C_4^{4-0} = C_4^4 = 1$ .

<sup>1</sup> В 7 классе вы познакомились с двумя видами составляемых из выбранных элементов комбинаций. Те из них, которые определялись не только составом элементов, но и порядком их расположения, получили название размещений, а комбинации, при составлении которых порядок следования элементов не важен, были названы сочетаниями.



Окончательно имеем:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$(a + b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + \dots \\ \dots + C_n^2 a^2 b^{n-2} + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^0 b^n$$

Это равенство называют **формулой бинома<sup>1</sup> Ньютона<sup>2</sup>**, а коэффициенты в правой её части называют **биномиальными**.




**Пример 3.** Используя формулу бинома Ньютона, определить, какой коэффициент будет иметь член многочлена  $(x + 2)^{10}$ , содержащий седьмую степень переменной  $x$ .

**Решение.** Подставим в формулу бинома Ньютона  $x$  вместо  $a$ ,  $2$  вместо  $b$  и  $10$  вместо  $n$ . Нас интересует член многочлена стандартного вида, содержащий  $x^7$ . Поскольку  $x^7 = x^{10-3}$ , имеем:

$$C_{10}^{10-3} x^{10-3} \cdot 2^3 = C_{10}^7 x^7 \cdot 8 = \frac{10! \cdot 8}{7! \cdot (10-7)!} x^7 = \frac{10! \cdot 8}{7! \cdot 3!} x^7 = \\ = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 8}{3 \cdot 2} x^7 = 10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8 x^7 = 960 x^7.$$




О т в е т: 960.  $\triangle$

## Упражнения

- Сколько слагаемых получится после раскрытия скобок, если не приводить подобные члены:
  - $(ac + 2a^2c - 3ac^2)(a - 2c)$ ;
  - $(a^2b^2 - 4ab + ab^2)(ab + a^2b - ab^2)$ ;
  - $(abc + 3bc - a^2)^2$ ;
  - $(3d^3ca^3 + 2ca^2d)^3$ ?  1, 2

<sup>1</sup> Бином — двучлен.

<sup>2</sup> *Исаак Ньютон* (1643—1727) — великий английский физик и математик. За многочисленные изобретения и открытия Ньютону была присвоена степень магистра. В дальнейшем он был избран членом Лондонского королевского общества.

2. ● Найдите член, не содержащий  $x$ , и член, содержащий  $x$  в наибольшей степени, после приведения выражения к многочлену стандартного вида:
- 1)  $(x^3 + x^2 + x + 5)(x^2 - x + 2)$ ;
  - 2)  $(2x - 3)^3(x^2 + 1)^4$ ;
  - 3)  $(1 - x^2 - x^4)^{2013}$ ;
  - 4)  $(1 - x^2 - x^4)^{2014}$ ;
  - 5)  $(x + 1)(x + 2)(x + 3)\dots(x + 100)$ ;
  - 6)  $(x - 1)(x - 2)(x - 3)\dots(x - n)$ .
3. ● Не преобразовывая в многочлен стандартного вида выражение  $(3x^4 + 5x^3 - 6x^2 - 2x + 8)(2x^3 - 7x^2 - 8x - 3)$ , назовите его член, содержащий  $x$  в наибольшей степени, и член, не содержащий  $x$ .
4. 1) Приведите к многочлену стандартного вида выражение: а)  $(x + y)^3$ ; б)  $(x - y)^3$ .  3, 4  
2) Прочитайте полученные формулы.  
3) Чем эти формулы отличаются друг от друга?  
4) Какие ещё формулы сокращённого умножения вы знаете?
5. Приведите к многочлену стандартного вида выражение:
- 1)  $(1 + b)^3$ ;
  - 4)  $(c - 4d)^3$ ;
  - 7)  $\left(\frac{1}{2}a + ab\right)^3$ ;  5
  - 2)  $(a - 2)^3$ ;
  - 5)  $(a + 0,3bc)^3$ ;
  - 8)  $\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right)^3$ ;
  - 3)  $(3a + b)^3$ ;
  - 6)  $(x^2 - 0,1y)^3$ ;
  - 9)  $(0,5x^2 - 0,2x^5)^3$ .
6. Докажите тождество:  
1)  $(-a - b)^3 = -(a + b)^3$ ;
- 2)  $(a - b)^3 = -(b - a)^3$ .
7. Впишите пропущенные одночлены так, чтобы получилось тождество:
- 1)  $(a + \dots)^3 = a^3 + 3a^2x + \dots + \dots$ ;
  - 2)  $(\dots - b)^3 = \dots - 3c^2b + \dots - b^3$ ;
  - 3)  $(\dots + 2a)^3 = 64 + \dots + \dots + \dots$ ;
  - 4)  $(a^3 - \dots)^3 = \dots - \dots + 3a^3c^2 - \dots$ ;
  - 5)  $(2x^3 + \dots)^3 = \dots + 12x^8 + \dots + \dots$ ;
  - 6)  $(\dots - 5b^2)^3 = \dots - 15a^2b^8 + \dots - \dots$ ;
  - 7) ●  $(\dots + \dots)^3 = \dots + 12x^2y + 48xy^2 + \dots$ ;
  - 8) ●  $(\dots - \dots)^3 = \dots - 144a^4b^3 + 108a^2b^6 + \dots$ .  7

8. Докажите тождество:

$$1) (2a + b)^3 - (a - b)^2(8a + b) = 27a^2b;$$

$$2) (a - 2b)^3 - (a + b)^2(a - 8b) = 27ab^2;$$

$$3) (5x + y)^3 - y(5x - y)^2 - 25x(x + y)^2 = 100x^3;$$

$$4) 5(x - y)^3 + 5y(x + y)^2 - x(x - 5y)^2 = 4x^3.$$

9. Решите уравнение:

$$1) \circ (y + 1)^3 - \frac{y}{4}(2y + 3)^2 = 7;$$

$$2) \circ (8x - 3)^2x - (4x - 1)^3 = 7;$$

$$3) \circ \left(2x - \frac{1}{3}\right)^3 - x\left(2x - \frac{1}{3}\right)^2 = 0;$$

$$4) (4y - 3)^3 - y(8y - 9)^2 = 0;$$

$$5) \bullet x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0;$$

$$6) \bullet 8y^3 - 36y^2 + 54y - 27 = 0.$$

10.  $\bullet$  1) Если из куба некоторого нечётного числа вычесть произведение трёх последовательных нечётных чисел, среднее из которых равно данному числу, то получится 28. Найдите эти числа.

2) Если к произведению трёх последовательных чётных чисел прибавить их удвоенную сумму и вычесть куб среднего из них, то получится 20. Найдите эти числа.

11.  $\circ$  1) Преобразуйте квадрат трёхчлена  $(a + b + c)^2$  в многочлен стандартного вида.

2) Какие изменения нужно внести, чтобы получилось разложение квадрата трёхчлена  $(a + b - c)^2$ ?

3) Используя полученную формулу, преобразуйте в многочлен стандартного вида:

$$a) (2x + 3y - 1)^2;$$

$$б) (x - 4y - 7)^2.$$

12. Представьте в виде степени двучлена:

$$1) \circ \frac{4}{9}a^2 + 4ab + 9b^2;$$


$$2) \circ 0,25c^4 - 0,2c^2d^3 + 0,04d^6;$$

$$3) \circ c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3;$$

$$4) \circ 8n^3m^3 - 12n^2m^4 + 6nm^5 - m^6;$$

$$5) \bullet a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1;$$

$$6) \bullet c^4 - 8c^3 + 24c^2 - 32c + 16. \quad \text{📖 } 6$$

- 13.** Найдите сумму коэффициентов многочлена стандартного вида, к которому приводится выражение:
- 1)  $(x + y)^{11}$ ;                      3)  $(2x + 3y)^{20}$ ;  
2)  $(x - 2y)^{37}$ ;                      4)  $(3x - 2y)^{20}$ .
- 14.** Вычислите:
- 1)  $59^2$ ;                                  5)  $256^2 - 44^2$ ;  
2)  $62^2$ ;                                  6)  $43 \cdot 57$ ;  
3)  $31^3$ ;                                  7)  $\frac{181^2 - 71^2}{312^2 - 202^2}$ ;  
4)  $39^3$ ;                                  8)  $203 \cdot 197 - 201 \cdot 199$ .  8
- 15.** Известно, что  $x + y = 5$ ,  $xy = 3$ . Найдите:
- 1)  $x^2y + xy^2$ ;                      5)  $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ ;  
2)  $x^2 + y^2$ ;                          6)  $4x^3y + 4xy^3$ ;  
3)  $x^3y^6 + x^6y^3$ ;                      7)  $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ ;  
4)  $x^3 + y^3$ ;                          8)  $x^4 + y^4$ .
- 16.** 1) Найдите третий член разложения бинома Ньютона:
- а)  $(c + d)^3$ ;                          в)  $(c + d)^5$ ;  
б)  $(c - d)^4$ ;                          г)  $(2c - 3d)^6$ .  
2) Найдите коэффициент члена, содержащего  $d^2$ .
- 17.** По формуле  $(a + b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^2 a^2 b^{n-2} + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^0 b^n$  представьте в виде многочлена стандартного вида:
- 1)  $(c + d)^6$ ;                          3)  $(2k - 3n)^4$ ;  
2)  $(b + 2c)^5$ ;                          4)  $(m + n)^7$ .
- 18.** Преобразуйте в многочлен стандартного вида:
- 1)  $(x - 2)^6$ ;                          3)  $(3 + y)^7$ ;                          5)  $(x + 2)^6 + (x - 2)^6$ ;  
2)  $(x + 2)^6$ ;                          4)  $(3 - y)^7$ ;                          6)  $(3 + y)^7 - (3 - y)^7$ .
- 19.** Докажите равенство:
- 1)  $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5$ ;  
2)  $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0$ .
- 20.** Не приводя к многочлену стандартного вида бином  $(x - 3)^{12}$ , найдите:
- 1) член этого многочлена:
- а) содержащий  $x^8$ ;  
б) содержащий  $x^{10}$ ;  
в) не содержащий  $x$  (т. е. свободный член);

2) сумму коэффициентов многочлена стандартного вида, к которому приводится данное выражение.


21. ● Найдите шестой член разложения  $(y^3 + x^5)^n$ , если коэффициент третьего члена равен 45.

22. \* Докажите, что  $m^3 + n^3 + p^3 = 3mnp$ , если  $m + n + p = 0$ .

## ! Контрольные вопросы и задания

- Докажите, что  $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$ .
- Представьте в виде многочлена стандартного вида:
  - $(2a - 3)^3$ ;
  - $(x + 3)^4$ .
- Вычислите: 1)  $41^3$ ; 2)  $58^3$ .

## 2. Формулы суммы и разности кубов

Формулу куба суммы  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ , с которой вы познакомились в предыдущем пункте, часто бывает удобно записывать иначе. 

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

**Куб суммы** двух выражений равен сумме их кубов и утроенного произведения этих выражений на их сумму.

Во-первых, в таком виде её удобнее читать.

Во-вторых, выражение, стоящее в левой части формулы, и последнее слагаемое её правой части имеют общий множитель  $a + b$ , что наводит на мысль попробовать сгруппировать эти выражения в одной части и вынести общий множитель за скобки:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) = (a + b)((a + b)^2 - 3ab) = \\ &= (a + b)(a^2 + b^2 + 2ab - 3ab) = (a + b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

Выражению, стоящему в последней скобке, не хватает коэффициента 2 у одночлена  $ab$ , чтобы стать равным квадрату разности, поэтому *трёхчлен*  $a^2 - ab + b^2$  называют *неполным квадратом разности*.

Выполненное преобразование привело нас к ещё одной формуле сокращённого умножения — *формуле суммы кубов*.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

**Сумма кубов** двух выражений равна произведению суммы этих выражений на неполный квадрат их разности.

Для получения *формулы разности кубов* заменим  $b$  на  $-b$ .

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

**Разность кубов** двух выражений равна произведению разности этих выражений на неполный квадрат их суммы.

Формулы сокращённого умножения применяют для решения двух основных задач: приведения выражения к многочлену стандартного вида и разложения многочлена на множители.



**Пример 1.** Разложить на множители выражение

$$(3x + 2y)^3 - 125y^3.$$

**Решение.** Данное выражение является разностью кубов:

$$\begin{aligned} (3x + 2y)^3 - (5y)^3 &= (3x + 2y - 5y)((3x + 2y)^2 + 5y(3x + 2y) + \\ &+ 25y^2) = (3x - 3y)(9x^2 + 12xy + 4y^2 + 15xy + 10y^2 + 25y^2) = \\ &= 3(x - y)(9x^2 + 27xy + 39y^2) = 9(x - y)(3x^2 + 9xy + 13y^2). \end{aligned}$$

При разложении на множители могут также использоваться вынесение общего множителя за скобки и группировка.



**Пример 2.** Разложить на множители выражение

$$8y^3 - 26y^2 - 13y + 1.$$

**Решение.** Сгруппируем первый с четвёртым и второй с третьим члены данного многочлена:

$$\begin{aligned} 8y^3 - 26y^2 - 13y + 1 &= (8y^3 + 1) - (26y^2 + 13y) = \\ &= (2y + 1)(4y^2 - 2y + 1) - 13y(2y + 1) = (2y + 1)(4y^2 - 15y + 1). \end{aligned}$$

Упражнения 

**23.** Преобразуйте формулу куба разности, группируя члены в её правой части и вынося общий множитель за скобки. Предложите вариант чтения формулы куба разности.

**24.** Выведите формулу разности кубов, преобразуя формулу куба разности.  10–12

**25.** Разложите на множители выражение:

1)  $x^3 + 27$ ;

7)  $8a^3 - b^6$ ;

2)  $8 - y^3$ ;

8)  $\frac{1}{8}c^3 - d^9$ ;

3)  $1 + 0,064a^3$ ;

9)  $0,001p^6 - \frac{27}{125}z^{12}$ .

4)  $c^3 + 125b^3$ ;

5)  $1000 + b^3c^3$ ;

6)  $1 - a^3c^3$ ;

 13–15

**26.** 1) Представьте в виде многочлена стандартного вида:

а)  $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$ ;

г)  $(6 - a)(36 + 6a + a^2)$ ;

б)  $(b - 5)(b^2 + 5b + 25)$ ;


д)  $\left(\frac{2}{3} - c\right)\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}c + c^2\right)$ ;

в)  $(a - 2)(a^2 - 4a + 4)$ ;


е)  $(a^2 - 2b)(a^4 + 2a^2b + 4b^2)$ ;

ж)  $(2c + 3p)(4c^2 - 12cp + 9p^2)$ ;

з)  $(0,3x + 4y)(0,09x^2 - 1,2xy^2 + 16y^4)$ ;

и)  $\left(5d^3 + \frac{2}{3}c^4\right)\left(25d^6 - \frac{10}{3}d^3c^4 + \frac{4}{9}c^8\right)$ ;  16

к)  $(0,2a^2b - 0,5b^3)(0,04a^4b^2 + 0,1a^2b^4 + 0,25b^6)$ .

2) Какие формулы сокращённого умножения вы использовали?  17

**27.** Разложите на множители:

1)  $a^3 + b^3 - ab(a + b)$ ;

6)  $a^2 - 9 - 2(a^3 + 27)$ ;

2)  $b^3 - c^3 + bc(b - c)$ ;

7)  $5b(b^2 - 4) + 2(b^3 - 8)$ ;

3)  $x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$ ;

8)  $a^6 - b^6$ ;

4)  $b^3 - 8 + b^2(b - 2)$ ;


9)  $x^9 - y^{12}$ ;

5)  $c^3 + 27 - c^2(c + 3)$ ;

10)  $c^{15} - b^{21}$ .

**28.** Впишите пропущенные одночлены так, чтобы получилось тождество:

1)  $\dots + \dots = (\dots + \dots)(25a^2 - 15ab + 9b^2)$ ;

2)  $\dots - \dots = (\dots - \dots)(49c^2 + 14cx + 4x^2)$ ;  19